B- SÜREKLİ DAĞILIMLAR.

Sürekli t.d. lerin gösterdiği dağılımlardır. Bu bölümde bazı önemli sürekli dağılımlar incelenecektir. Sürekli dağılımlarda olasılık fonksiyonunun yerini olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.) alacaktır.

1- DÜZGÜN (UNIFORM) DAĞILIM

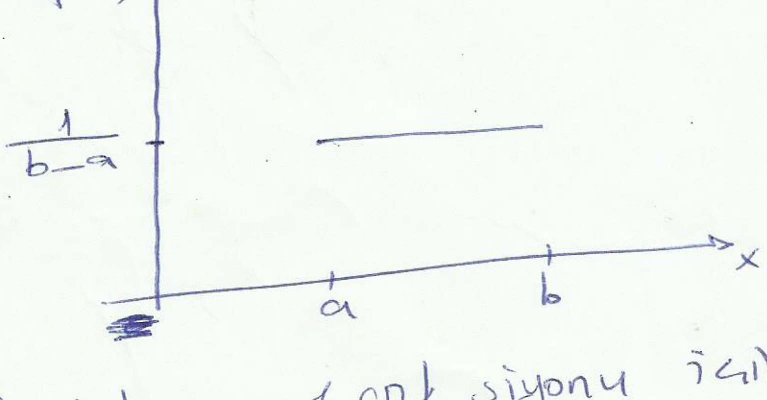
X, t.d. $[a,b]$ aralığındaki değerlerin tümünü olabiliyor ve yoğunluk fonksiyonu sabit ise X ~~düz~~ düzgün dağılıma sahiptir denir.

Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad d.h. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot x \Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

olduğundan $f(x)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. O.y.f. nin grafiği aşağıdadır.



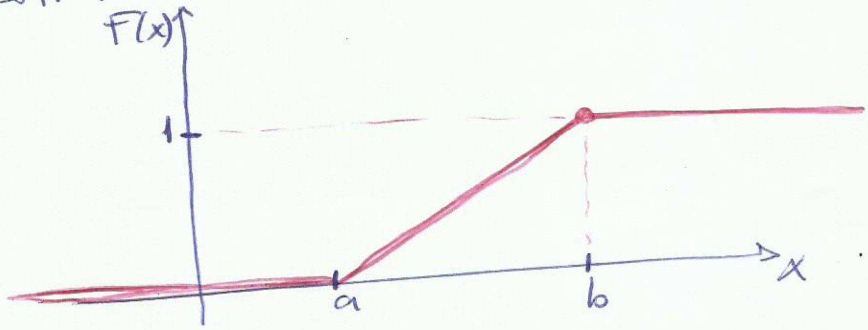
Dağılım fonksiyonu için;

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(x) \cdot dx = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\, x \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$ olduğundan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Dağılım fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



Teorem: X, t.d. [a,b] aralığında düzgün dağılırsa;

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$ dır.

İspat: X, t.d. [a,b] aralığında sürekli olduğu için,

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{2\cdot(b-a)} \cdot (b^2 - a^2)$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b-a)\cdot(b+a) = \frac{a+b}{2} \quad //$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3\cdot(b-a)}$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3\cdot(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{\cancel{(b-a)}.(b^2+ab+a^2)}{3.\cancel{(b-a)}} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}$$

$$= \frac{b^2+a^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$ elde edilir.

<u>Örnek</u> : X, t.d. $[0,2]$ aralığında herhangi bir nokta olarak seçiliyor. Buna göre;

a.) Seçilen noktanın dağılımını belirleyiniz.

b.) Noktanın 1 ve $\frac{3}{2}$ arasında olma olasılığını bulunuz.

c.) Dağılım fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.

d.) Seçilen noktanın ortalama kaç olacağını bulunuz.

<u>Çözüm</u> : a.) X, t.d. $[0,2]$ aralığında düzgün dağılımlıdır. o.y.f. nu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

b.) Seçilen noktanın $[1, \frac{3}{2}]$ aralığında olması olasılığı,

$$p(1 < x < \frac{3}{2}) = \int_1^{3/2} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.x \Big|_1^{3/2}$$

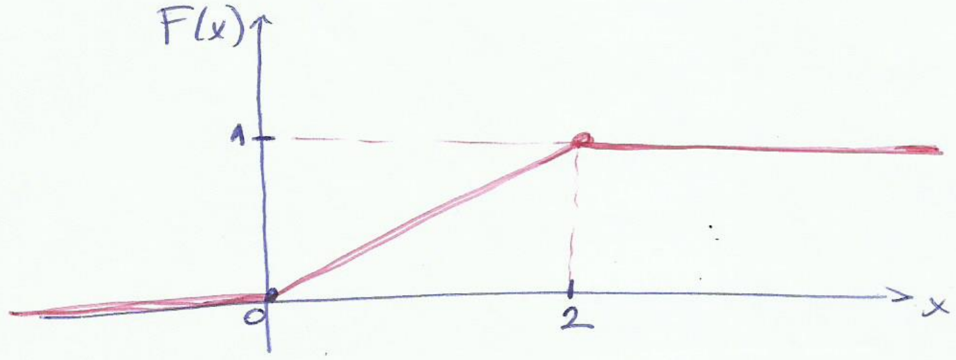
$$= \frac{1}{2}.(\frac{3}{2} - 1) = \frac{1}{4}$$

c.) $$F(x) = p(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x \Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2}.x$$

O halde dağılım fonksiyonu yazılabilir;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2}x & , 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & , x > 2 \end{cases}$$



d.) $E(x) = \int_0^2 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1_{//}$$

[0,2] aralığında seçilen noktanın değeri ortalama 1' dir.

<u>Örnek</u>: Bir banliyö treni programa göre istasyona saat 11:00 da varmaktadır. X, t.d. nin, trenin istasyona varma zamanını göstermek üzere 10:55 – 11:10 aralığında düzgün dağılım göstermektedir. Trenin programda belirtilen saatten en çok 3 dk. sonra istasyonda olma ihtimalini bulunuz.

<u>Çözüm</u>: X: Trenin istasyona varma zamanı olsun.

X, t.d. nin dağılımı düzgün olup o.y.f. nu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , d.h \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{15} & , 10:55 \leq x \leq 11:10 \\ 0 & , d.h. \end{cases}$$

Trenin istasyona en çok 3 dk. sonra varma olasılığı,

$$P(X \leq 11{:}\underline{03}) = \int_{10:55}^{11:\underline{03}} \frac{1}{15}\,dx = \frac{x}{15} \cdot \Big|_{10:55}^{11:03}$$

$$= \frac{11.03 - 10.55}{15} = \frac{8}{15} \,//$$